

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (jeweils 5 Pkt.): Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ 0 & \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

- a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- b) Zeigen Sie, dass f bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ partiell differenzierbar ist mit $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$ und $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$.
- c) Zeigen Sie, dass $\left| \frac{f\left(\begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}\right) - (1 \ 0)\begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}\right\|_2} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ für $h \in \mathbb{R}$ mit $h > 0$ gilt.
- d) Begründen Sie anhand der vorherigen Teilaufgaben, warum f bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht total differenzierbar ist.

Aufgabe 2 (jeweils 5 Pkt.): Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 4x^2 + 2y^2 - 4y + 8xy - 3x^2y - 4.$$

- a) Bestimmen Sie alle $\bar{y} \in \mathbb{R}$, für welche die Punkte $\begin{pmatrix} 4 \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ auf der Höhenlinie $\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 10\}$ liegen.
- b) Berechnen Sie $\nabla f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ \bar{y} \end{pmatrix}\right)$ für die $\bar{y}$ aus Teil a).
- c) Bestimmen Sie $H = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid Df\left(\begin{pmatrix} 4 \\ \bar{y} \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Df\left(\begin{pmatrix} 4 \\ \bar{y} \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ \bar{y} \end{pmatrix}\}$ für die $\bar{y}$ aus Teil a).
- d) Verifizieren Sie durch direktes Nachrechnen, dass $\nabla f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ \bar{y} \end{pmatrix}\right)$ für die $\bar{y}$ aus Teil a) senkrecht auf H steht.